机械能衡算与柏努利方程式

李 德 清
(湖北大学化学系)

化工生产中的物料,大多是流体。流体的流动和输送是化工生产中的重要过程。许多单元操作,如流体输送、搅拌、混合、非均相物系的分离、固体流态化等都涉及流体流动的基本规律。传热、传质和化学反应过程也多是在流动条件下进行,传热、传质的规律与流体流动的规律也有类似之处。因此,研究流体处于相对静止和流动过程的基本规律是《化学工程》的重要基础。

学习"流体流动与输送"这一章,除了应该掌握流体流动过程的基本概念和流动机理以外,重点要学好流体静力学基本方程式、连续性方程工式和柏努利方程式。流体静力学方程式是研究流体处于相对静止或平衡的力学规律得到的,流体的平衡是流体流动的特例,可以合并到柏努利方程中一起研究。连续性方程式是由对稳定流动的流体作物料衡算时得到的。由连续性方程可得出"不可压缩流体在管道中的流速与管道内径平方成反比"的结论。此结论在分析流体流动问题时很有用,但它简单明确,不难掌握。柏努利方程式是由对流体流动作能量衡算得到的,它能解决流体流动(包括平衡)中的许多问题。如流体输送时的管路设计,输送机械功率的计算,压强、流量、流速的测量,容器间相对位置的确定等,在化学工程中应用非常广泛。因此,这是本章重点中的重点。下面就对这一问题进行讨论。

一、能量守衡定律的应用

柏努利方程可以对流动系统中的一个流体微元作受力分析,从牛顿第二定律出发,写出运动微分方程,在一定的边界条件下进行积分得到。也可以由机械能守衡导出。对于不可压缩的理想流体在工业管道内作稳定流动时,其机械能衡算式为

$$gZ_1+\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}=gZ_2+\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho} \tag{1}$$

由于只有在无摩擦的理想条件下,才能保持机械能守衡,只能假设流体的粘度为零,上式才能成立。故式(1)只能用于理想流体。式(1)称为柏努利方程。该方程说明,理想流体在管内流动时,在任一截面上流体所具有的三项机械能之和是一常数。这是能量守衡定律在流体流动中的具体表达形式。

实际流体有粘性,粘性流体在流动过程中因内摩擦而引起机械能损耗,这一损耗常称为阻力损失,以 $\sum h_f$ 表示,记在等式右边。为了克服流动阻力,常用输送机械提供外功,此外功以 U 表示,记在等式左边,则有

$$gZ_1+\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+U=gZ_2+\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+\sum h_f \tag{2}$$

式(2)习惯上也称为柏努利方程,但它是式(1)的修正,要注意 U 和 $\sum h_f$ 并不是流体所具有的机械能,而是在流动过程中所获得和所消耗的能量。

二、应用条件和解题方法

收稿日期:1996－06－10

从柏努利方程的推导过程,可知该方程仅适用于下述情况:

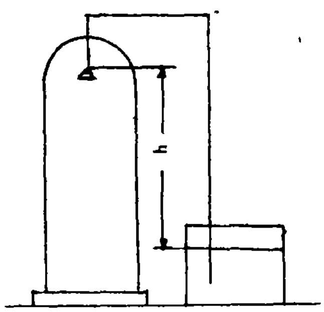
1.**用于不可压缩流体**　不可压缩流体的密度或比容为常数,故两截面间流体的静压能的变化为$\triangle p/\rho$,较为简单。对于可压缩流体,其密度在流动过程中不是常数,而是随压强的变化而变化。在计算时,需按热力学方法处理,先利用气体状态方程表示出密度与压强的函数关系,再根据不同的过程(等温、绝热或多变过程)进行积分。所以,柏努利方程是用于不可压缩流体的表达式,对于可压缩流体,只有在两截面压强变化不大时才允许使用。

2.**用于稳定流动**　柏努利方程是以流体作稳定流动为前题条件推导出的。流体作稳定流动时,在任一截面上,流体的流量、流速、压强等运动参数不随时间而变。对于不稳定流动,流体的运动参数随时间而变,柏努利方程已不适用。这类问题,只有在某些特定的条件下,列出某一瞬间的柏努利方程式,再结合物料衡算式予以解决。

3.**用于管内流动**　化工生产中大量遇到的是流体在管道内的流动。流体在管道内流动属于有固定边界的流动,流体的运动参数一般取截面上的平均值。例如讲流体的流速,指的是截面上的平均流速。实际上粘性流体流动时,管壁处的流速为零,管中心的流速最大,有一定的分布。取平均值后,同一截面上任一点的流速相等(即没有变化)。这样处理,流体的流动参数只沿管长而变,可视为一维流动。同一截面上的速度有分布,动能也有分布,即也有平均动能。值得注意的是,同一截面上的平均动能并不等于由平均速度计算出的动能。而工程计算中希望使用平均速度来计算平均功能,故引入一动能修正系数α。在管内湍流情况下,α可近似取为1,故式(2)中动能项前未出现这一修正系数。由此可知,柏努利方程只适用于流体沿管道的流动。

应用柏努利方程解决实际问题时,要按下述方法进行:首先应根据题意画出流动系统示意图,指明流体的流动方向。画图可使问题变得明显而直观。再选取两个截面,以确定衡算的范围。所选两截面应与流动方向相垂直,两截面间流体必须连续流动,两截面应选在已知条件最多的面上,两截面间还应包含所求的未知量。应注意将上游截面定为截面1—1′,下游截面定为截面2—2′。第三,选取基准面,以确定流体位能的数值。基准面可任意选取,但应与地面平行。为了计算方便,通常选基准面与两截面中的一个截面重合,如果是水平管道,则基准面通过管道中心线。

下面通过一个例题说明应用柏努利方程解题时要注意的问题。



右图为丙烯精馏塔的回流系统。精馏塔内操作压强为13.3kgf/cm²(表压),槽内液面上方压强为16.5kgf/cm²(表压)。塔内丙烯出口管距贮槽液面高度h=30m,输液管内径为145mm,送液量为40t/h、其丙烯密度为600kg/m³,管路阻力为15.3m液柱。试问将丙烯从贮槽送到精馏塔内是否需要泵?这是一个流体输送过程。题目问将丙烯输送到精馏塔内是否需要泵?也就是说流体在这一段管路内流动需不需要外加能量(外功)。解题的方法是进行能量衡算,由计算结果求出外功U>0,则需要泵,反之则可自流加料。

本题已附有示意图,只要选取两截面和基准面即可计算。有的学员取塔内丙烯出口管处为截面1—1′,取贮槽内液面为截面2—2′,以截面2—2′为基准面,在两截面间列出柏努利方程式如式(2),解出U=378.4J/kg,结论是需要泵输送。

这个计算结果是错误的,错在没有注意流体的流向,将上游截面定 (下转第4—64页)

又 $(a_{11})_0=m,(a_{22})_0=m$,故由 $E_P=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$ 及 $E_K=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$,式中系数 $C_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2 E_P}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)_0$ 是常数,系数 $a_{\alpha\beta}$ 不变。知在平衡位置附近,势能及动能可表为

$$\left.\begin{aligned}E_P&=\frac{1}{2}Kx_1^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{a}x_1^2-Kx_1x_2+\frac{1}{2}Kx_2^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{a}x_2^2\\&=\frac{1}{2}K(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{a}(x_1^2+kx_2^2)\\E_K&=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

将(4)式中的 E_P 和 E_K 代入第二类拉格朗日方程中,得运动方程为:

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=K(x_1-x_2)-\frac{mg}{a}x_1\\m\ddot{x}_2&=K(x_1-x_2)-\frac{mg}{a}x_2\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

这是二阶常数线性齐次微分方程,具有 $x_1=A_1e^{\lambda t},x_2=A_2e^{\lambda t}$ 形式的特解,代入得

$$\left.\begin{aligned}A_1(m\lambda^2+\frac{mg}{a}+K)-A_2K&=0\\-A_1K+A_2(m\lambda^2+\frac{mg}{a}+K)&=0\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

此方程组非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}m\lambda^2+\frac{mg}{a}+K & -K\\ -K & m\lambda^2+\frac{mg}{a}+K\end{vmatrix}=0\quad(7)$$

由此得四个本征值:

$$\lambda_1=\pm i\sqrt{g/a}=\pm i\gamma_1,$$

$$\lambda_2=\pm i\sqrt{g/a+2k/m}=\pm i\gamma_2$$

(5)式的通解为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A_1^1e^{i\gamma_1t}+A_1^{-1}e^{-i\gamma_1t}+A_1^2e^{i\gamma_2t}+A_1^{-2}e^{-i\gamma_2t}\\x_2&=A_2^1e^{i\gamma_1t}+A_2^{-1}e^{-i\gamma_1t}+A_2^2e^{i\gamma_2t}+A_2^{-2}e^{-i\gamma_2t}\end{aligned}\right\}(8)$$

当以 $\lambda=\lambda_1$ 代入(7)中有

$\triangle_{11}=K,\triangle_{12}=K$,故 $A_1^1=-A_2^1,A_1^{-1}=-A_2^{-1}$ 同理,当以 $\lambda=\lambda_2$ 代入(7)中有 $\triangle_{11}=-K,\triangle_{12}=-K$,故 $A_1^2=-A_2^2,A_1^{-2}=-A_2^{-2}$

在(8)式中有 $2S^2=2\cdot2^2=8$ 个(S=自由度)任意常数,实际上只有 $2S$ 个(4个)是独立的。(5)式的解最后变为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A_1^1e^{i\gamma_1t}+A_1^{-1}e^{-i\gamma_1t}+A_1^2e^{i\gamma_2t}+A_1^{-2}e^{-i\gamma_2t}\\x_2&=A_1^1e^{i\gamma_1t}+A_1^{-1}e^{-i\gamma_1t}-A_1^2e^{i\gamma_2t}-A_1^{-2}e^{-i\gamma_2t}\end{aligned}\right\}(9)$$

式中四个任意常数 $A_1^1,A_1^{-1},A_1^2,A_1^{-2}$ 由初始条件确定,即由 $t=0$ 时,$x_1,x_2,\dot{x}_1$ 及 $\dot{x}_2$ 之值确定。

(上接第4—41页) 为截面 $2-2'$,下游定为截面 $1-1'$,与公式推导时的截面取法相反。前面已经分析,U 是流体输送机构提供的外功,是进入系统的能量,记在等式左边,即加在上游截面处。$\sum h_f$ 是流体在流动过程中损耗的机械能,是系统减少的能量,记在等式左边,其符号为"—",即为

$$gZ_1+\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+U-\sum h_f=gZ_2+\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}\quad(3)$$

将 $\sum h_f$ 移项才得到式(3)这样整齐的形式。

本题中丙烯是从贮槽向精馏塔流动,应将贮槽内液面取为截面 $1-1'$,将丙烯出口管处取为截面 $2-2'$,以截面 $1-1'$ 为基准面,按式(2)计算得出 $U=-78J/kg$,结论是不需要泵。由此可见,即使是记熟了几个公式,不明确公式的物理意义、应用范围,做题时也可能出错。

柏努利方程应用很广,教材中已作了较详细的讨论。读者只要注意它的表达形式、应用条件和解题方法,多做一些习题,不断积累经验,就可提高分析和解决问题的能力。